3°/ (u_n) est une suite décroissante, minorée par -1 donc (u_n) est convergente.

Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue en 1 donc $f(l) = l$.

$\dfrac{l^3+2l^2+3l-2}{l^2+3} = l \Leftrightarrow l^3+2l^2+3l-2 = l^3+3l \Leftrightarrow l = \pm 1$ or

$-1 \le u_n \le 0 \Rightarrow -1 \le l \le 0$ d'où $l = -1$.

Conclusion : (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Solution 12 :

1°/• La fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2+4}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et en particulier sur $\mathbf{R}_-$.

• La fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{2}{x+1} - x$ est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ et en particulier sur $\mathbf{R}_+^*$.

• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2 = f(0)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \sqrt{4} = 2 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur **R.**

2°/a) • $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4}+2} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}+2} = 0$

donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\dfrac{2}{x+1}-x-2}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-x^2-3x}{x(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x(-x-3)}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-x-3}{x+1} = -3$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -3$.

• On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

b) La courbe de f admet 2 demi tangentes (le point d'abscisse 0 est un point anguleux)